# ANALYSE DE FOURIER DES OBSERVATIONS DE MARÉES

par D. E. Cartwright et Diana B. Catton
(National Institute of Oceanography, Wormley, Godalming, Surrey)

---

Pour l'extraction des constantes harmoniques d'une série d'observations de marées, on a employé d'une façon habituelle au cours des dernières décades des méthodes habilement conçues pour s'adapter à des machines à calculer fonctionnant à la main. Parmi ces méthodes, la plus efficace et la mieux connue est la méthode du Liverpool Tidal Institute (Doodson, 1928) qui peut être maintenant regardée comme une application particulière d'une méthode générale de filtrage à l'aide de combinaisons linéaires simples, méthode qui a été exposée par H. et Y. Labrouste (1940) et appliquée aux marées terrestres par Lecolazet (1956). (Coulmy (1961) propose une nouvelle application de cette méthode). Cependant, les machines à calculer électroniques modernes permettent d'employer des méthodes d'analyse qui, bien que donnant une précision supérieure du point de vue de la réduction des effets des variations accidentelles, étaient jusqu'ici d'un emploi prohibitif pour leur utilisation pratique. La méthode des moindres carrés, qui en théorie est la méthode idéale, rentre dans cette catégorie; elle est d'un usage courant en Allemagne (Horn, 1960), et Imbert (1954) l'a utilisée sous sa forme abrégée pour des analyses de 30 jours. On peut aussi l'appliquer à des données incomplètes (Groves et Lezama, 1959). L'analyse de Fourier est une autre méthode de ce genre, presque identique dans certains cas au procédé des moindres carrés, mais qui a certains petits avantages. Elle convient mieux aussi lorsque, comme c'est le cas habituel, il existe déjà un programme d'analyse générale par série de Fourier, établie pour une machine particulière. Des applications aux marées de l'analyse de Fourier ont été faites au Japon par Miyazaki et Ueno (1958, 1960) et au Royaume-Uni par Cartwright (1961) ainsi que par Bowden et Hughes (1961).

Le procédé de calcul étudié dans cet article est semblable en principe à ceux qui ont été décrits par Horn et Miyazaki, mais il en diffère par quelques traits importants. C'est une extension d'un procédé utilisé par l'un des auteurs (Cartwright, 1961) pour l'analyse des lectures de courant de 24 heures et de 29 jours, pour l'extraction de 64 composantes harmoniques d'une série continue d'une durée d'environ un an d'observations horaires. Les programmes qui ont été établis pour effectuer ces calculs et les calculs connexes, principalement sur des machines Deuce et Mercury, son décrits dans un certain nombre de rapports du National Institute of Oceanography.

Nous supposons comme d'habitude que les observations peuvent être représentées par la somme linéaire :

$$\zeta(t) = X_o + \sum_{q=1}^{Q} R_q \cos(\sigma_q t - \varphi_q) + r(t) \tag{1}$$

où les $\sigma_q$ sont une série de fréquences déterminées astronomiquement (degrés par heure solaire moyenne), parmi lesquelles il n'y en a pas deux qui diffèrent de moins de $0{,}04°/h$ environ, et $R_q$ et $\varphi_q$ sont des amplitudes et des phases qui peuvent être regardées pratiquement comme constantes au cours d'une année, mais qui varient légèrement avec la période nodale lunaire de 18,6 années selon les formules établies par DOODSON pour $f$ et $u$. Le résidu $r(t)$ représente une variation accidentelle due aux effets météorologiques et aux erreurs instrumentales et qui est dans l'ensemble petite par rapport aux amplitudes de la marée principale. (L'étude actuelle est née en fait d'une recherche sur le spectre de $r(t)$ que l'on obtient par l'analyse du résidu d'enregistrement lorsque les oscillations de la marée sont retranchées de $\zeta$). Nous avons une suite continue de $N + 1$ valeurs de $\zeta$ également espacées à des heures que nous appellerons $t = -\frac{1}{2} N\tau(\tau) + \frac{1}{2} N(\tau)$ (N étant pair), de sorte que $t = 0$ est l'heure centrale à laquelle toutes les valeurs des paramètres de la relation d'équilibre des marées $f$, $u$ et V seront rapportées. Pour la plupart de nos besoins, nous prendrons 1 heure pour l'intervalle de temps commun $\tau$.

Dans la stricte application de la méthode des moindre carrés, on détermine les valeurs de $X_o$ et de chacune des quantités : $X_q = R_q \cos \varphi_q$ et $Y_q = R_q \sin \varphi_q$ pour lesquelles la quantité :

$$\sum_{n=-N/2}^{N/2} \left\{ \zeta(n\tau) - X_o - \sum_{q=1}^{Q} (X_q \cos n\sigma_q\tau + Y_q \sin n\sigma_q\tau) \right\}^2$$

est minimum. Cela donne deux jeux de $Q + 1$ et $Q$ équations simultanées pour les valeurs de X et Y respectivement pour lesquelles on peut écrire les deux $p^{mes}$ équations :

$$X_o F_{po} + \sum_{q=1}^{Q} X_q F_{pq} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \zeta(n\tau) \cos n\sigma_p\tau \tag{2}$$

$$\sum_{q=1}^{Q} Y_q G_{pq} = \sum_{n=-N/2}^{N/2} \zeta(n\tau) \sin n\sigma_p\tau \tag{3}$$

où

$$F_{pq}, G_{pq} = \frac{1}{2}(N+1) \left\{ \frac{S\left[\frac{1}{2}(N+1)(\sigma_p - \sigma_q)\tau\right]}{S\left[\frac{1}{2}(\sigma_p - \sigma_q)\tau\right]} \pm \frac{S\left[\frac{1}{2}(N+1)(\sigma_p + \sigma_q)\tau\right]}{S\left[\frac{1}{2}(\sigma_p + \sigma_q)\tau\right]} \right\}, \tag{4}$$

$\sigma_o = 0$ et $S(x) = \sin x/x$.

Si dans les sommations par rapport à $n$ les termes finaux correspondant à $n = \pm \frac{1}{2}$ N sont divisés par deux, N + 1 est alors remplacé par N dans (4) et les fonctions $S(x)$ des dénominateurs (et non des numérateurs) sont remplacées par tg $x/x$, ce qui, de l'avis des auteurs, est préférable. Pour toute durée $N_\tau$ de l'ordre d'une année, les termes en diagonale des matrices symétriques $F_{pq}$ et $G_{pq}$ sont voisins de $\frac{1}{2}(N+1)$, les termes pour lesquels $|p - q| = 1$ sont plus petits que 0,11 (N + 1) environ, et les valeurs des autres éléments non en diagonale tendent à diminuer à mesure que $|p - q|$ augmente. Les matrices sont par conséquent toujours suffisamment bien conditionnées pour la solution des jeux d'équations (2) et (3), mais on peut encore les améliorer par un choix convenable de $N\tau$ de sorte qu'il y ait le plus de valeurs possible de $(N+1)(\sigma_p - \sigma_q)\tau/360$, qui soient à peu près des nombres entiers. Cela s'obtient en prenant pour $N_\tau$ un nombre entier de jours solaires moyens aussi voisin que possible d'un nombre entier de mois lunaires, ou d'une façon moins satisfaisante de demi-mois lunaires. Le chiffre de 355 jours (13 mois lunaires) est très commode à cet égard et 369 jours (13 mois lunaires 1/2) un petit peu moins commode. Pour $N = 24 \times 369 = 8\,856$ et $Q = 64$, les matrices F et G définies par l'équation (4) et leurs inverses ont été calculés et mis en tables par HORN (1960).

La méthode d'analyse par séries de FOURIER est semblable à la méthode des moindres carrés si dans le deuxième membre des équations (2) et (3) nous divisons par deux les termes finaux $\zeta(\pm \frac{1}{2} N\tau)$ et nous remplaçons $\sigma_p$ par $360p/N$ où les $p$ sont des nombres entiers les plus voisins de $N\sigma_p \tau/360$. Nous pouvons écrire :

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{Q} X_q J_{0q} = (1/N) \sum_{n=-N/2}^{N/2}{}'' \zeta(n\tau) \tag{5}$$

$$\sum_{1}^{Q} X_q K_{pq} = (2/N) \sum_{-N/2}^{N/2}{}'' \zeta(n\tau) \cos 2\pi pn/N \tag{6}$$

$$\sum_{1}^{Q} Y_q K_{pq} = (2/N) \sum_{-N/2}^{N/2}{}'' \zeta(n\tau) \sin 2\pi pn/N \tag{7}$$

pour chaque valeur de $p$ où $\Sigma''$ représente une sommation dont les termes finaux sont divisés par deux. Les éléments $J_{pq}$, $K_{pq}$ de la matrice peuvent être exprimés sous la forme

$$J_{pq},\ K_{pq} = \frac{S(\pi\alpha)}{S(\pi\alpha/N)} \left[ \frac{\sin \Omega (p+\alpha)}{\sin \Omega \left(p + \frac{1}{2}\alpha\right)},\ \frac{\sin \Omega p}{\sin \Omega \left(p + \frac{1}{2}\alpha\right)} \right] \tag{8}$$

où $\alpha = (N\sigma_q\tau/360) - p$, $\Omega = 2\pi/N$, et $S(x) = \sin x/x$.

Si, comme c'est le cas pour 355 jours, il est possible de rendre toutes

Table 1

Values of q, p and |sin π α| for each tidal constituent, with 369 days' and 355 days' analyses

| Constituent | q | N = 8856 p | N = 8856 \|sin πα\| | N = 8520 p | N = 8520 \|sin πα\| |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Sa | 1 | 1 | .032 | 1 | .088 |
| Ssa | 2 | 2 | .065 | 2 | .175 |
| Mm | 3 | 13,14 | .943 | 12,13 | .358 |
| MSf | 4 | 25 | .028 | 24 | .134 |
| Mf | 5 | 27 | .036 | 26 | .042 |
| - | - | - | - | - | - |
| $2Q_1$ | 6 | 316 | .626 | 304,305 | .633 |
| $\sigma_1$ | 7 | 318 | .024 | 306 | .180 |
| $Q_1$ | 8 | 329,330 | .944 | 317,318 | .314 |
| $\rho_1$ | 9 | 331,332 | .950 | 319,320 | .520 |
| $O_1$ | 10 | 343 | .004 | 330 | .047 |
| $MP_1$ | 11 | 345 | .060 | 332 | .221 |
| $M_1$ | 12 | 356,357 | 1.000 | 343 | .067 |
| $\chi_1$ | 13 | 358,359 | .961 | 344-5-6 | .555 |
| $\pi_1$ | 14 | 367 | .064 | 353 | .175 |
| $P_1$ | 15 | 368 | .032 | 354 | .088 |
| $S_1$ | 16 | 369 | 0 | 355 | 0 |
| $K_1$ | 17 | 370 | .032 | 356 | .088 |
| $\psi_1$ | 18 | 371 | .064 | 357 | .175 |
| $\varphi_1$ | 19 | 372 | .097 | 358 | .261 |
| $\theta_1$ | 20 | 381,382 | .941 | 367 | .401 |
| $J_1$ | 21 | 383,384 | .953 | 368,369 | .439 |
| $SO_1$ | 22 | 395 | .004 | 380 | .047 |
| $OO_1$ | 23 | 397 | .069 | 382 | .129 |

| Constituent | q | N = 8856 p | N = 8856 \|sin πα\| | N = 8520 p | N = 8520 \|sin πα\| |
|---|---|---|---|---|---|
| $OQ_2$ | 24 | 672,673 | .945 | 647 | .269 |
| $MNS_2$ | 25 | 675 | .922 | 649 | .096 |
| $2N_2$ | 26 | 686 | .651 | 660,661 | .562 |
| $\mu_2$ | 27 | 688 | .056 | 662 | .266 |
| $N_2$ | 28 | 699,700 | .933 | 673 | .229 |
| $\nu_2$ | 29 | 701,702 | .960 | 674-5-6 | .593 |
| $OP_2$ | 30 | 711 | .036 | 684 | .042 |
| $M_2$ | 31 | 713 | .028 | 686 | .134 |
| $MKS_2$ | 32 | 715 | .093 | 688 | .306 |
| $\lambda_2$ | 33 | 724,725 | .943 | 697,698 | .358 |
| $L_2$ | 34 | 726,727 | .952 | 699,700 | .480 |
| $T_2$ | 35 | 737 | .032 | 709 | .088 |
| $S_2$ | 36 | 738 | 0 | 710 | 0 |
| $R_2$ | 37 | 739 | .032 | 711 | .088 |
| $K_2$ | 38 | 740 | .065 | 712 | .175 |
| $MSN_2$ | 39 | 751 | .943 | 722,723 | .358 |
| $KJ_2$ | 40 | 753,754 | .962 | 724,725 | .516 |
| $2SM_2$ | 41 | 763 | .028 | 734 | .134 |
| - | - | - | - | - | - |
| $MO_3$ | 42 | 1056 | .024 | 1016 | .180 |
| $M_3$ | 43 | 1069,70 | .999 | 1029 | .201 |
| $SO_3$ | 44 | 1081 | .004 | 1040 | .047 |
| $MK_3$ | 45 | 1083 | .060 | 1042 | .221 |
| $SK_3$ | 46 | 1108 | .032 | 1066 | .088 |
| - | - | - | - | - | - |

| Constituent | q | N = 8856 p | N = 8856 \|sin πα\| | N = 8520 p | N = 8520 \|sin πα\| |
|---|---|---|---|---|---|
| $MN_4$ | 47 | 1412,13 | .922 | 1359 | .096 |
| $M_4$ | 48 | 1426 | .056 | 1371,72 | .266 |
| $SN_4$ | 49 | 1437,38 | .933 | 1383 | .229 |
| $MS_4$ | 50 | 1451 | .028 | 1396 | .134 |
| $MK_4$ | 51 | 1453 | .093 | 1397,98 | .306 |
| $S_4$ | 52 | 1476 | 0 | 1420 | 0 |
| $SK_4$ | 53 | 1478 | .065 | 1422 | .175 |
| - | - | - | - | - | - |
| $2MN_6$ | 54 | 2125,26 | .911 | 2045 | .038 |
| $M_6$ | 55 | 2139 | .084 | 2057,58 | .393 |
| $MSN_6$ | 56 | 2150,51 | .922 | 2069 | .096 |
| $2MS_6$ | 57 | 2164 | .056 | 2082 | .266 |
| $2MK_6$ | 58 | 2166 | .121 | 2083,84 | .431 |
| $2SM_6$ | 59 | 2189 | .028 | 2106 | .134 |
| MSK | 60 | 2191 | .093 | 2108 | .306 |
| - | - | - | - | - | - |
| $M_8$ | 61 | 2852 | .112 | 2744 | .513 |
| $M_{10}$ | 62 | 3565 | .140 | 3430 | .624 |
| $M_{12}$ | 63 | 4278 | .168 | 4116 | .723 |
| - | - | - | - | - | - |

TABLE 1. — Valeurs de $q$, $p$ et $|\sin \pi\alpha|$ pour chaque composante de marée, avec des analyses de 369 et 355 jours.

les valeurs *diagonales* de $|\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$, les deux méthodes sont alors pratiquement identiques en principe, bien que leurs matrices diffèrent légèrement comme nous le montrerons. En général cependant, il peut être difficile de donner une justification parfaitement rigoureuse de la méthode de FOURIER qui satisfasse un puriste. Nous pouvons dire que la méthode consiste à déterminer par les moindres carrés un certain nombre d'harmoniques de fréquence $\Omega_p$ et de faire ensuite de petites corrections pour tenir compte du fait que ces fréquences diffèrent légèrement des fréquences naturelles $\sigma_p$. Autrement dit, nous pouvons supposer que le spectre de $\zeta(t)$ consiste en une série de raies correspondant aux harmoniques de la marée superposées à un niveau de base continu assez bas qui est le spectre de la fonction accidentelle $r(t)$. La méthode de FOURIER applique à tout le spectre une série de filtres à bandes étroites correspondant aux fonctions J et K, chacune de ces fonctions portant principalement sur une seule raie de marée. Mais chaque filtre laisse passer aussi une petite erreur, à répartition normale, proportionnelle au produit du spectre de $r(t)$ à la fréquence convenable et de la bande passante efficace $\Omega/\tau$ du filtre. En principe, ces erreurs peuvent être réduites indéfiniment en choisissant un intervalle de temps suffisamment long $N\tau$.

Ce dernier procédé est naturellement le même que celui adopté dans tout procédé général de filtrage tel que ceux de DOODSON ou de LECOLAZET. Le procédé de FOURIER ne diffère de ces derniers que par le fait que l'on trouve, si on fait une évaluation théorique des erreurs dues à une perturbation accidentelle hypothétique, que l'erreur-type de la méthode de FOURIER est toujours inférieure, et qu'elle n'est que légèrement supérieure à celle des moindres carrés, méthode qui, naturellement, donne l'erreur théorique la plus faible.

Comme pour les matrices F et G, les éléments les plus importants des matrices J et K sont ceux qui se trouvent sur la diagonale ou près d'elle et ces éléments sont représentés très approximativement par la fonction $S(\pi\alpha)$. Si $N\tau$ est de l'ordre d'une année, les éléments non en diagonale diminuent constamment de valeur lorsque $|\alpha|$ augmente. Bien qu'elles ne soient pas symétriques comme F et G, les matrices J et K ont l'avantage suivant : pour toute composante $q$ les valeurs $J_{pq}$ et $K_{pq}$ sont proportionnelles à $\sin(N\sigma_q\tau\pi/360)$, indépendamment de $p$ sauf en ce qui concerne le signe. C'est pourquoi si on choisit N de façon à rendre cette dernière quantité très petite, par exemple pour la composante $q'$, les termes $J_{pq'}$, $K_{pq'}$ sont alors très petits pour tous les $p$, excepté naturellement les termes sur la diagonale qui sont égaux approximativement à l'unité. Ainsi, l'apport d'une composante dans chaque équation (6) et (7) (excepté celles pour lesquelles $p'$ correspond à $q'$) peut être rendu minimum. Ceci ne peut se faire aussi facilement avec les matrices des moindres carrés, car le facteur correspondant est $\sin \frac{1}{2}[(N+1)(\sigma_p - \sigma_q)\tau]$, qui dépend de $p$ comme de $q$.

Des exemples parfaits des propriétés ci-dessus sont illustrés par la valeur moyenne $X_0$ qui s'élimine identiquement de toutes les équations (6), et par la série purement solaire $S_1$, $S_2$, etc., qui, si $N\tau$ est un nombre entier de jours, n'a aucun effet sur les sommes (6) et (7), excepté pour ses propres

Table 2

369 days' analysis. Inverse normalized matrix J'' for semi-diurnal constituents. (Figures reduced from 6 decimal places).

| p \ q | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 672 | .586 | .156 | .041 | .020 | -.016 | -.024 | -.006 | -.006 | -.006 | .009 | .014 | -.004 | .004 | -.004 | .004 | -.011 | -.008 | -.003 |
| 673 | .908 | -.297 | -.001 | .011 | .016 | .009 | -.004 | -.004 | -.004 | -.008 | -.005 | -.002 | .002 | -.002 | .002 | .003 | .003 | -.002 |
| 675 | .125 | 1.182 | .028 | .031 | .015 | -.002 | -.010 | -.010 | -.009 | -.006 | .002 | -.006 | .006 | -.005 | .005 | -.002 | -.001 | -.004 |
| 686 | .008 | .015 | 1.086 | .127 | .009 | -.008 | -.009 | -.008 | -.008 | -.003 | .004 | -.004 | .004 | -.004 | .004 | -.003 | -.002 | -.003 |
| 688 | .000 | .001 | -.010 | .999 | .001 | -.001 | -.001 | -.001 | -.001 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 |
| 699 | .012 | .014 | .045 | .030 | .602 | .279 | .021 | .019 | .018 | -.016 | -.026 | .007 | -.007 | .007 | -.007 | .016 | .011 | .005 |
| 700 | -.010 | -.015 | .010 | .021 | .855 | -.050 | .021 | .017 | .015 | .012 | .002 | .006 | -.006 | .005 | -.005 | -.000 | -.001 | .004 |
| 701 | .002 | .001 | .025 | .021 | -.052 | .828 | .023 | .020 | .018 | -.004 | -.015 | .006 | -.006 | .006 | -.006 | .009 | .006 | .004 |
| 702 | -.019 | -.028 | -.000 | .019 | .284 | .647 | .030 | .023 | .019 | .029 | .015 | .007 | -.007 | .006 | -.006 | -.007 | -.006 | .004 |
| 711 | .000 | .000 | -.000 | -.001 | -.001 | .001 | 1.000 | -.006 | -.003 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 |
| 713 | -.000 | -.000 | .000 | .000 | .000 | -.000 | -.004 | 1.000 | .005 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | .000 | .000 |
| 715 | -.000 | -.001 | .001 | .001 | .001 | -.001 | -.007 | -.015 | 1.001 | .001 | -.002 | .001 | -.001 | .001 | -.001 | .001 | .000 | .001 |
| 724 | -.005 | -.006 | -.015 | -.009 | .014 | .028 | .020 | .025 | .032 | .617 | .281 | -.020 | .019 | -.018 | .018 | -.028 | -.019 | -.008 |
| 725 | .006 | .008 | -.004 | -.007 | -.014 | -.004 | .017 | .020 | .023 | .846 | -.051 | -.019 | .017 | -.016 | .015 | .001 | .002 | -.006 |
| 726 | -.001 | .000 | -.009 | -.007 | .001 | .012 | .016 | .018 | .023 | -.051 | .837 | -.021 | .019 | -.018 | .018 | -.016 | -.010 | -.007 |
| 727 | .011 | .015 | -.000 | -.007 | -.026 | -.015 | .018 | .019 | .022 | .282 | .631 | -.027 | .023 | -.020 | .019 | .014 | .012 | -.007 |
| 737 | .000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .001 | -.000 | 1.000 | .010 | -.005 | .003 | -.001 | -.000 | -.000 |
| 738 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 739 | -.000 | -.000 | .000 | .000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 | -.000 | -.000 | .000 | -.005 | .010 | 1.000 | -.010 | .001 | .000 | .000 |
| 740 | .000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 | .000 | .001 | .001 | .001 | .001 | -.001 | .007 | -.010 | .020 | 1.000 | -.001 | -.001 | -.001 |
| 751 | -.001 | -.003 | .007 | .007 | .002 | -.006 | -.010 | -.010 | -.011 | -.003 | .015 | -.027 | .029 | -.032 | .036 | 1.201 | .124 | .034 |
| 753 | .002 | .003 | .005 | .003 | -.004 | -.008 | -.004 | -.004 | .005 | .009 | .017 | -.010 | .011 | -.012 | .014 | -.321 | .892 | .019 |
| 754 | -.007 | -.010 | -.001 | .004 | .014 | .009 | -.006 | -.006 | -.006 | -.024 | -.016 | -.014 | .014 | -.015 | .016 | .162 | .616 | .025 |
| 763 | .000 | .000 | -.000 | -.000 | -.000 | .000 | .000 | .000 | .000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | -.000 | .000 | .000 | 1.000 |

TABLE 2. — Analyse de 369 jours.
Matrice normalisée inverse J″ pour composantes semi-diurnes.
(Valeurs obtenues à partir de chiffres à six décimales).

Table 3

355 days' analysis. Inverse normalized matrix J" for semi-diurnal constituents. (Figures reduced from 6 decimal places).

| p \ q | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 647 | 1.012 | .045 | -.005 | -.006 | .003 | .003 | -.002 | -.002 | -.002 | .002 | .001 | .001 | -.001 | .001 | -.001 | .001 | .001 | -.001 |
| 649 | -.015 | 1.001 | -.002 | -.002 | .001 | .001 | -.001 | -.001 | -.001 | .001 | .001 | .000 | -.001 | .000 | -.000 | .000 | .000 | -.000 |
| 660 | .015 | .017 | 1.005 | .076 | -.014 | -.006 | .008 | .006 | .005 | -.005 | -.003 | -.004 | .004 | -.003 | .003 | -.002 | -.001 | .002 |
| 661 | -.006 | -.000 | .249 | .124 | .003 | -.019 | .001 | .003 | .006 | .003 | -.006 | .000 | .001 | -.001 | .002 | -.003 | -.004 | -.001 |
| 662 | -.005 | -.006 | .022 | 1.004 | .007 | .007 | -.004 | -.004 | -.003 | .002 | .002 | .002 | -.002 | .002 | -.002 | .001 | .001 | -.001 |
| 673 | -.003 | -.003 | .006 | .005 | 1.003 | .021 | -.007 | -.005 | -.004 | .003 | .002 | .002 | -.002 | .002 | -.001 | .001 | .000 | -.001 |
| 674 | .005 | .003 | -.019 | .004 | .113 | .260 | .006 | -.001 | -.007 | -.007 | .006 | -.002 | .001 | -.000 | -.001 | .003 | .004 | .002 |
| 675 | .006 | .007 | -.007 | -.014 | .085 | .979 | .020 | .018 | .015 | -.006 | -.008 | -.005 | .005 | -.005 | .005 | -.004 | -.003 | .003 |
| 676 | .002 | -.000 | -.008 | .006 | .005 | -.162 | -.003 | -.007 | -.010 | -.003 | .007 | .000 | -.001 | .002 | -.002 | .003 | .004 | .000 |
| 684 | .000 | .000 | -.000 | -.001 | .001 | .001 | 1.001 | .007 | .003 | -.001 | -.001 | -.001 | .001 | -.000 | .000 | -.000 | -.000 | .000 |
| 686 | -.001 | -.001 | .001 | .002 | -.003 | -.003 | .021 | 1.002 | -.021 | .003 | .003 | .002 | -.002 | .002 | -.002 | .001 | .001 | -.001 |
| 688 | -.002 | -.003 | .003 | .004 | -.007 | -.007 | .026 | .052 | 1.015 | .010 | .009 | .005 | -.005 | .005 | -.004 | .003 | .002 | -.002 |
| 697 | -.003 | -.003 | .003 | .003 | -.005 | -.003 | .009 | .010 | .010 | 1.005 | .040 | .010 | -.009 | .008 | -.006 | .003 | .001 | -.003 |
| 698 | .002 | .001 | -.006 | .002 | .003 | -.010 | -.002 | .004 | .012 | .158 | .206 | -.004 | .001 | .002 | -.004 | .006 | .008 | .002 |
| 699 | .003 | .003 | -.002 | -.004 | .005 | .007 | -.010 | -.012 | -.015 | .060 | .989 | -.015 | .014 | -.013 | .012 | -.007 | -.005 | .004 |
| 700 | .001 | -.000 | -.003 | .002 | .001 | -.007 | .001 | .005 | .010 | .024 | -.132 | -.000 | -.003 | .005 | -.006 | .006 | .007 | .001 |
| 709 | -.000 | -.000 | .000 | .001 | -.001 | -.001 | .001 | .001 | .001 | -.002 | -.003 | 1.002 | -.030 | .015 | -.009 | .002 | .001 | -.001 |
| 710 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 711 | .000 | .000 | -.000 | -.001 | .001 | .001 | -.001 | -.001 | -.001 | .002 | .002 | .014 | -.028 | 1.000 | .027 | -.002 | -.001 | .001 |
| 712 | -.001 | -.001 | .001 | .001 | -.001 | -.001 | .002 | .002 | .002 | -.003 | -.004 | -.020 | .031 | -.060 | 1.004 | .005 | .003 | -.003 |
| 722 | .002 | .001 | -.003 | .001 | .002 | -.004 | -.001 | .001 | .003 | .005 | -.006 | .004 | -.002 | -.001 | .004 | .134 | .068 | .007 |
| 723 | .001 | .002 | -.001 | -.002 | .002 | .002 | -.003 | -.003 | -.003 | .004 | .005 | .008 | -.009 | .010 | -.010 | .989 | -.043 | .009 |
| 724 | .001 | .001 | -.003 | .001 | .001 | -.003 | -.001 | .001 | .002 | .004 | -.005 | .003 | -.002 | -.000 | .003 | -.093 | .203 | .007 |
| 725 | .002 | .002 | -.001 | -.003 | .003 | .005 | -.005 | -.005 | -.006 | .005 | .008 | .011 | -.013 | .015 | -.015 | .105 | 1.000 | .018 |
| 734 | .001 | .001 | -.000 | -.001 | .001 | .001 | -.001 | -.001 | -.001 | .001 | .001 | .002 | -.002 | .002 | -.002 | .004 | .003 | 1.003 |

**TABLE 3. — Analyse de 355 jours.**
Matrice normalisée inverse J" pour composantes semi-diurnes.
(Valeurs obtenues à partir de chiffres à six décimales).

valeurs de $p$. Ainsi, tous les éléments sauf un des colonnes correspondant à $S_2$ dans les tables 2 et 3 sont nuls, à l'inverse de la colonne ou rangée $S_2$ des matrices de moindres carrés (Tables 2*a*, 2*b* de HORN (1960)) qui contiennent quelques éléments assez importants.

Il est naturellement très désirable que $M_2$, $K_1$ et $O_1$ profitent aussi, autant que possible, de cette propriété, et une fois encore ceci est obtenu si $N\tau$ est voisin d'un nombre entier de demi-mois lunaires. En fait, 369 jours est une quantité très satisfaisante pour ces dernières composantes, mais non pas pour les composantes importantes $N_2$, $Q_1$ et quelques autres. Avec 355 jours on obtient des valeurs plus grandes de $|\sin \pi\alpha|$ pour $M_2$, $K_1$ et $O_1$, mais des valeurs raisonnablement faibles pour $N_2$, $Q_1$ et toutes les autres composantes, et c'est probablement le meilleur compromis. Les valeurs de $|\sin \pi\alpha|$ qui figurent dans la table 1 donnent une idée générale de la comparaison entre les deux périodes.

Si la durée de toutes les observations disponibles est bien inférieure à une année, deux ou plusieurs composantes donneront des valeurs de $|\alpha|$ inférieure à $\frac{1}{2}$ pour la même valeur de $p$, de sorte qu'il peut y avoir plusieurs termes importants non en diagonale qui tendent à fausser les équations (6) et (7) mal établies. La meilleure façon de procéder dans ces cas est de réunir, en petits groupes, les composantes qui ont des fréquences voisines et de résoudre une matrice correspondante plus petite d'équations dont les termes dominants sont seulement sur la diagonale. Les composantes de chaque groupe peuvent alors être séparées par comparaison avec le résultat semblable provenant d'un autre jeu d'observations, ou par la méthode habituelle de comparaison avec des composantes de marée connues provenant d'un port adjacent. Cette dernière méthode a été étudiée dans l'annexe à l'article de CARTWRIGHT (1961). En même temps, on peut obtenir par l'analyse de FOURIER une valeur raisonnable d'environ dix composantes principales en utilisant une série de 29 jours d'observations horaires sans appliquer aucune correction spéciale, comme le montrent BOWDEN et HUGHES (1961).

MIYAZAKI (1958) a adopté 355 jours pour la période de son analyse de FOURIER, mais il a considérablement raccourci les calculs en utilisant un intervalle de temps $\tau = 35$ h 1/2, de sorte que N n'est que 240. A première vue, ceci paraît impossible, puisque avec $N = 240$, toutes les valeurs de $N\sigma_q\tau/360$ sauf pour les ondes à longue période, sont supérieures à $1/2\,N$ (en fait $> N$). Cependant, MIYAZAKI a observé que d'autres valeurs de $p$ convenables, en particulier $p' = \lambda N \pm p$ où $\lambda$ est un nombre entier, peuvent presque toutes être comprises entre 0 et 120 sans coïncidences. (Ces autres valeurs proviennent du fait que $J_{pq}$ et $K_{pq}$ donnés par (8) sont inchangées, excepté peut-être en ce qui concerne le signe, par le remplacement de toute valeur de $p$ par $p'$. Cependant, comme J et K sont fonctions de N comme de $N\tau$ on ne peut employer les mêmes matrices pour différentes valeurs de N). Cette méthode est très ingénieuse, mais a l'inconvénient que les erreurs accidentelles dues à $r(t)$ étant proportionnelles à $N^{-\frac{1}{2}}$ sont environ six fois plus grandes que pour $\tau = 1$ heure. De plus, on attribue à certaines petites composantes semi-diurnes importantes des valeurs de $p'$ situées dans le domaine des longues périodes où le spectre de $r(t)$ est le plus grand. Pour ces raisons, la méthode de Miyazaki ne peut probablement être utilisée d'une façon sûre qu'avec des données de marées provenant de régions relativement exemptes de perturbations météorologiques.

## Procédés employés dans les calculs

Nous décrivons maintenant quelques procédés utilisés dans les calculs avec les programmes employés par les auteurs pour réduire au minimum la durée des calculs ou pour obtenir une plus grande précision. La première et la plus fastidieuse partie de toute l'opération est de transférer les 8 000 lectures horaires impaires sur cartes ou rubans perforés. Que cette opération soit faite à la main ou automatiquement, il est important de faire certaines vérifications, car il est possible que des erreurs soient introduites par ce procédé. Une méthode simple est de faire explorer les données par la machine et d'effectuer les différences entre des valeurs consécutives ou mieux entre des valeurs séparées par des intervalles de 25 heures. On notera alors celles dont la valeur dépasse une limite donnée. La liste de ces valeurs peut être ainsi revérifiée par comparaison avec les tracés originaux. Ce procédé élimine certainement les grosses erreurs qui se produisent malheureusement trop fréquemment dans ce travail de codage, et les petites erreurs qui passeront inaperçues n'affecteront pas sensiblement les calculs. Pour obtenir une meilleure précision, l'une des quantités suivantes qui permettent de détecter les écarts avec la moyenne peut servir pareillement de test :

$$\zeta(n) - \frac{1}{2}\zeta(n-s) - \frac{1}{2}\zeta(n+s),$$

$$\zeta(n) - \frac{2}{3}\zeta(n-s) - \frac{2}{3}\zeta(n+s) + \frac{1}{6}\zeta(n-2s) + \frac{1}{6}\zeta(n+2s)$$

pour $s = 1$, 24 ou 25 heures, et pour tous les $n$ (excepté les quelques premières et dernières valeurs). Ces tests ne peuvent naturellement pas être appliqués avec l'intervalle de temps de 35 h 1/2 choisi par Miyazaki.

Pour calculer les sommes de Fourier qui figurent dans le deuxième terme des équations (6) et (7), nous utilisons un programme très économique déjà établi pour la machine à calculer Deuce par J. M. Watt (1959). La Deuce n'est pas un calculateur rapide d'après les normes modernes, mais elle a une capacité d'emmagasinage relativement grande et les auteurs ne connaissent pas de programme établi pour aucun autre calculateur qui puisse effectuer plus rapidement ces calculs particuliers ou qui absorbent d'aussi grandes quantités de données. Le programme calcule exclusivement $A_p$ et $B_p$ pour des valeurs choisies de $p$, où :

$$A_p + iB_p = (2/M) \sum_{r=0}^{M-1} z_r \exp\,(i \cdot 2\pi pr/\mathrm{k}s) \tag{9}$$

et $k$ peut être 1, 2, ou 4, etc. Le temps de calcul est de M/200 secondes pour chaque valeur de $p$. Il est possible de disposer $z_r$ pour le faire correspondre avec $\zeta_n$ de telle façon qu'avec $M = N$ et $k = 1$, le calcul soit exactement celui que nécessitent les deuxièmes termes de (6) et de (7). Cependant, dans la pratique, il ne convient généralement pas de faire $M > 5\,000$, de sorte qu'à la place, nous faisons $M = \frac{1}{2} N$, $k = 2$, et nous appliquons l'équation (9) deux fois, d'abord avec $z_r = \zeta(r\tau)$ puis avec $z = \zeta(-r\tau)$. Les paires de valeurs de $A_p$ sont ensuite additionnées et on en retranche $B_p$, avec de petits ajustements pour les termes divisés par deux de (6) et (7). Les 82 valeurs de $p$ utilisées avec $N = 8\,850$ et $8\,520$ sont données dans la table 1.

Une caractéristique importante de ce programme qui explique pour une bonne part sa rapidité, est l'emploi de la méthode d'itération :

$$x_r = z_r + 2x_{r+1} \cos \theta - x_{r+2}. \qquad (10)$$

Lorsque l'équation (10) est répétée M—1 fois avec les valeurs initiales

$$x_M = 0, \; x_{M-1} = z_{M-1},$$

elle donne finalement $x_1$ et $x_0$, qui peuvent, comme le montre l'annexe, satisfaire à la relation

$$x_0 - x_1 e^{-i\theta} = \sum_{r=0}^{M-1} z_r e^{ir\theta} \qquad (11)$$

Lorsqu'on donne à $\theta$ la valeur de $2\pi p/kM$ on obtient précisément la somme que l'on trouve par l'équation (9). D'autre part, avec $\theta = \sigma_p \tau$, le procédé pourrait être employé dans la méthode exacte des moindres carrés pour obtenir les sommes qui sont les deuxièmes membres de (2) et de (3). Le grand avantage d'emploi de ce procédé est qu'au lieu d'avoir à évaluer les M sinus et M cosinus, et à les multiplier et à les ajouter pour chaque valeur de $p$ comme l'interprétation directe de (9) le suggère, on n'a besoin que d'un sinus et d'un cosinus et la simple réitération de (10) est effectuée.

Le calculateur DEUCE fonctionne correctement avec 31 chiffres binaires et leur signe (et il est même plus précis qu'avec 9 chiffres décimaux), de sorte qu'il n'y a pas à craindre que des erreurs s'introduisent dans une proportion importante, même après 4 500 réitération environ. La seule restriction sérieuse est qu'aucune valeur de $2x_r \cos \theta$ ne doit dépasser la possibilité du magasin. L'annexe montre que cette possibilité n'est pas à redouter si $WM^2 < 5{,}30 \times 10^9$ ou W est la valeur la plus élevée de $z(\zeta)$ dans les données. Dans notre application, $M = 4\,260$ ou $4\,428$, pour une analyse de 355 ou 369 jours, auxquels correspondent les restrictions $|\zeta| < 292$ ou 270 respectivement. Cependant, ces restrictions bien que suffisantes, ne sont pas nécessaires et elles ne s'appliquent strictement qu'aux cas où $p = 1$ ; les autres valeurs permettent de multiplier les limites par $p$ approximativement. Avec $p = 1$ ou 2, les limites peuvent être dépassées sans danger par des données ordinaires de marées pourvu que la valeur moyenne $x_0$ soit inférieure à environ la moitié de la limite imposée pour $|\zeta|$. Cette réserve peut toujours être assurée si nécessaire en soustrayant une constante de toutes les valeurs de $\zeta$; on peut alors employer le programme sans erreur possible pour n'importe quel jeu de données de marées définies par des nombres de trois chiffres avec leur signe.

Revenons maintenant aux matrices J et K des équations (6) et (7).

On pourrait choisir, le plus simplement possible, une valeur de $p$ correspondant à chacune des 63 composantes de marées données dans la table 2 (la 63e composante $z_0$ est naturellement traitée séparément avec $p = 0$), évaluer les 3 969 éléments de chaque matrice et en faire les inverses. Un tel travail aurait été tout à fait impossible avant les calculateurs électroniques, mais de nos jours, c'est presque un travail courant, et en tout état de cause, c'est un calcul effectué une fois pour toutes. Les inverses $J^{-1}$, $K^{-1}$ pourraient alors être rapidement utilisées pour obtenir les valeurs de $X_q$ et $Y_q$ en partant des résultats de la sommation de FOURIER étudiés ci-dessus pour n'importe quel jeu de données. Comme autre solution à la nécessité d'établir tous les inverses, les équations pourraient être résolues approximativement, mais assez rapidement par environ deux étapes d'approximation.

Dans notre méthode, cependant, nous avons quelque peu modifié ce procédé simple. En premier lieu, étant donné qu'il se produit de grand écarts dans les fréquences $\sigma_q$ et dans les valeurs de $p$, en passant d'une série d'ondes de même indice à une autre, les éléments $J_{pq}$ et $K_{pq}$ pour lesquels $p$ correspond à une onde d'indice différent de celui de $q$ sont très petits et peuvent être considérés en pratique comme nuls. Par exemple dans une analyse de 355 jours, si $q$ correspond à la composante $M_2$ et $p$ à une des composantes diurne ou tiers-diurne, les éléments $J_{pq}$, $K_{pq}$ sont tous inférieurs en grandeur à 0,0002 fois les éléments en diagonale. Dans une analyse de 369 jours, les mêmes éléments sont encore plus petits; ceux qui correspondent à la composante $N_2$ sont plus grands, mais cependant négligeables parce que l'amplitude de $N_2$ est toujours bien inférieure à celle de $M_2$. Tous les éléments correspondant à $S_2$ sont rigoureusement nuls, comme nous l'avons déjà mentionné. Dans les deux cas, si l'on néglige ces effets, on introduit des erreurs qui sont dans les limites normalement acceptables. Il en résulte que les matrices peuvent être divisées en petits blocs indépendants, chacun corerspondant à un caractère de la marée (longue période, diurne, semi-diurne, etc.) et peuvent être inversés séparément. Ceci diminue sensiblement le travail, en particulier le travail qui concerne l'inversion qui, de plus, peut être exécuté d'une façon plus précise.

Nous avons mentionné que les fréquences de certaines composantes telles que $N_2$ ne sont pas voisines de celle d'une harmonique exacte de 369 jours. Pour $N_2$, nous avons $N\sigma_q\tau/360 = 699{,}617$, de sorte qu'à la fois $p = 699$ et $p = 700$ donnent de grandes valeurs de $S(\pi\alpha)$ et par conséquent des éléments qui permettent de déterminer solidement $N_2$. Pour en profiter, nous avons évalué les éléments de la matrice pour les deux valeurs de $p$ dans tous ces cas, et nous avons obtenu ainsi quelques équations supplémentaires. Les valeurs de $X_q$ et de $Y_q$ dérivent alors de ces équations par le procédé habituel des *moindres carrés* (qu'il ne faut pas confondre ici avec l'usage précédent que l'on a fait de cette expression. Ceci est obtenu en remplaçant l'inverse de la matrice carrée originale $J^{-1}$ par l'inverse de la matrice des *équations normales*.

$$J'' = (J'J)^{-1}J' \qquad (12)$$

où les primes dénotent une transposition. K est traité de la même façon. Les matrices $J''$ et $K''$ multipliées par les sommes de FOURIER $A_p$, $B_p$, donnent respectivement la solution désirée pour $X_q$ et $Y_q$.

Les 64 composantes de marées utilisées dans cette combinaison sont données dans la table 1, ainsi que les première, deuxième ou troisième valeurs de $p$ associées à chacune. Excepté pour $M_8$, $M_{10}$ et $M_{12}$, les composantes et leurs fréquences (ou vitesses) $\sigma_q$ ont été prises directement dans la table I de l'article de DOODSON (1928) et sont en réalité celles qui sont inscrites dans les fiches de marées du Bureau Hydrographique International. Dans l'analyse de 355 jours, les autres valeurs de $p$ ne sont pas si évidentes que dans d'autres cas, étant donné que toutes les valeurs de $\alpha$ sont très voisines de nombres entiers. Mais comme dans ce programme on a prévu des valeurs supplémentaires de $p$, elles ont été choisies pour les composantes pour lesquelles

$$|\sin \pi\alpha| > 0{,}3$$

Les tables 2 et 3 donnent les matrices J″ à trois décimales calculées respectivement pour les composantes semi-diurnes pour les analyses de 355 et 369 jours. Elles servent à illustrer les diverses propriétés étudiées dans cet article. Pour cette précision, les matrices K″ sont presque identiques aux J″, mais dans la pratique, nous utilisons les éléments calculés exactement à six décimales, et dans ces conditions, les différences entre J et K deviennent sensibles. On peut obtenir du National Institute of Oceanography, Wormley, Godalming, Surrey, si on le désire, les tables complètes de toutes les matrices J, K, J″, K″ pour toutes les composantes à employer pour des analyses de 355 ou 369 jours.

On a mis sur pied d'autres programmes pour calculer les facteurs habituels $f$, $u$ et V et obtenir des constantes de base H et $g$ d'après les résultats de $X_q$ et $Y_q$. Un autre programme soustrait les oscillations de marées $\Sigma R_q \cos(\sigma_q t - \varphi_q)$ des données originales $\zeta(t)$ de façon à pouvoir étudier les résidus $r(t)$, ce qui était le but primitif de cet article. Ces derniers programmes sont faciles à comprendre et n'exigent aucun commentaire spécial.

Le temps de calcul total nécessaire pour obtenir un jeu complet de constantes H et $g$, étant donné une série d'un an de valeurs de $\zeta$, est d'environ 60 minutes. Ceci naturellement ne comprend pas le temps considérable dévolu à la préparation et à la vérification des données sous une forme convenable pour alimenter la machine à calculer.

## ANNEXE :

### Restrictions numériques dans la formule d'itération de WATT

Nous remarquons d'abord qu'après R itérations de la formule (10), suivant les valeurs initiales $x_M = 0$, $x_{M-1}$, le résultat est :

$$x_{M-2-R} = \sum_{r=0}^{R+1} [\sin(r+1)\theta / \sin\theta]\, z_{M-2-R+r} \tag{13}$$

Ceci peut facilement être démontré par induction à l'aide de l'identité $2\cos\theta \sin(r+1)\theta - \sin r\theta \equiv \sin(r+2)\theta$.

$$2\cos\theta \sin(r+1)\theta - \sin r\theta \equiv \sin(r+2)\theta.$$

En prenant respectivement $R = M-3$ et $M-2$, nous obtenons les résultats suivants :

$$x_1 \sin \theta = \sum_{r=1}^{M-1} z_r \sin r\theta \tag{14}$$

$$x_0 - x_1 \cos \theta = \sum_{r=0}^{M-1} z_r \cos r\theta \ , \tag{15}$$

qui confirment le résultat dans l'équation (11).

Pour trouver une limite supérieure de grandeur aux nombres qui se présentent dans les calculs, supposons que W soit la plus grande valeur de $z_r$ dans les données. Nous pouvons alors écrire :

$$| x_{M-2-R} | \leqslant W \sum_{r=0}^{R+1} | \sin (r+1) \theta / \sin \theta |, \tag{16}$$

et comme cette dernière quantité augmente avec R, il suffira de trouver les limites supérieures pour $x_1$ ($R = M-3$) et $x_0$ ($R = M-2$) seulement. Nous avons $\theta = 2\pi p/kM$ et $p < \frac{1}{2}$ kM, mais il est commode de supposer que $0 < p \leqslant \frac{1}{4}kM$ et de remplacer les grandes valeurs de $p$ par $p' = \frac{1}{2}kM - p$, ce qui donne les mêmes valeurs de $| \sin r\theta |$.

Or, comme $\sum_{r=m}^{n-1} \sin r\theta = [\cos (m - \frac{1}{2}) \theta - \cos (n - \frac{1}{2}) \theta] \ / \ 2 \sin \frac{1}{2} \theta,$ il s'ensuit qu'entre les deux changements de signe consécutifs de $\sin r\theta$, $\sum | \sin r\theta | \leqslant 1/\sin \frac{1}{2} \theta$. Entre $r = 0$ et $r = M-1$, $\sin (r+1)$ change de signe $(2p/k) - 1$ fois, et ainsi d'après l'équation (16) :

$$| X_0 | \leqslant W.2p/(k \sin \theta \sin \frac{1}{2} \theta).$$

Pour $0 < p \leqslant \frac{1}{2}$ kM nous pouvons écrire :

$$\sin \theta \geqslant \theta (1 - \frac{1}{6} \theta^2) > 0{,}58\theta \ , \quad \sin \frac{1}{2} \theta \geqslant \frac{1}{2} \theta (1 - \frac{1}{24} \theta^2) > 0{,}44\theta \ ,$$

et ainsi

$$| x_0 | \leqslant (WkM^2/\pi^2 p) (1 - \frac{1}{6} \theta^2)^{-1} (1 - \frac{1}{24} \theta^2)^{-1} \tag{17}$$

Il est clair d'après (10) et (15) que le nombre le plus élevé que l'on doit manipuler dans les calculs a une limite inférieure plus petite que celle de $| 2x_0 |$. Par conséquent, dans une machine qui ne peut emmagasiner que des nombres inférieurs à L, il ne se produira pas de surcharge dans les procédés (10, 11) si pour $0 < p \leqslant \frac{1}{6}$ kM, on a

$$(2WkM^2/\pi^2 p) (1 - \frac{1}{6} \theta^2)^{-1} (1 - \frac{1}{24} \theta^2)^{-1} < L,$$

ou si $\frac{1}{4}$ kM $< p < \frac{1}{2}$ kM; une inégalité semblable est valable avec $(\frac{1}{2}$ kM $- p)$ à la place de $p$ et $(\pi - \theta)$ à la place de $\theta$. (Le cas $p = 0$ ne se produit pas, puisque $A_0$ est calculé directement comme $\Sigma z$).

Dans le cas actuel, nous avons $k = 2$, $L = 2^{31} - 1 = 2{,}14 \times 10^9$ et l'inégalité est manifestement satisfaite pour toutes les valeurs de $p$ si elle est satisfaite pour $p = 1$, valeur pour laquelle les termes en $\theta^2$ peuvent être négligés si M est suffisamment grand. Par conséquent, il n'y aura pas de surcharge d'emmagasinage si $WM^2 < \frac{1}{4}\pi^2 L = 5{,}30 \times 10^9$.

## RÉFÉRENCES


BOWDEN K. F. et HUGHES P. (1961) : The flow of water through the Irish Sea and its relation to wind. *Geoph. J.*, R. Astro Soc., *5.4*, 265-291.

CARTWRIGHT D. E. (1961) : A study of currents in the Strait of Dover. *J. Inst. Navig.*, *14.2*, 130-151.

COULMY G. (1961) : Nouvelle méthode de combinaisons linéaires d'ordonnées pour l'analyse des marées. (Article présenté au « Colloque sur l'emploi du calcul automatique pour le traitement des problèmes relatifs aux marées », Service Hydrographique de la Marine, Paris, nov. 1961).

DOODSON A. T. (1928) : The analysis of tidal observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, *A227*, 223-279.

GROVES G. W. and LEZAMA P. (1959) : Un metodo para la determinacion de las constantes armonicas de la marea. *Anal. Inst. Geofisica* (Mexico), *5*, 1-44.

HORN W. (1960) : Quelques aspects nouveaux des problèmes de marées. *Revue Hydr. Intern.*, XXXVII-2, 64-85.

IMBERT B. (1954) : L'analyse des marées par la méthode des moindres carrés. *C.O.E.C. Bull. d'Inf.*, VIe année, 9, 398-410.

LABROUSTE H. et Y (1940) : Analyse des graphiques résultant de la superposition des sinusoïdes. *Mem. Acad. Sci.* (Paris), *64*. (Aussi : Presses universitaires de France, Paris, 1943).

LECOLAZET R. (1956) : Application à l'analyse des observations de la marée gravimétrique de la méthode de H. et Y. LABROUSTE. *Ann. de Géoph.*, *12*, 59.

MIYAZAKI M. (1958) : A method for the harmonic analysis of tides. *Oceanographical Mag.* (Tokyo), *10.1*, 65-80.

MIYAZAKI M. et UENO T. (1960) : Tidal analysis and prediction by using the electronic computer. *Oceanographical Mag.* (Tokyo), *12.1*, 55-64.

WATT J. M. (1959) : A note on the evaluation of trigonometric series. *The Computer J.*, *1.4*, 162.