LA DÉVIATION ABSOLUE DE LA VERTICALE

par le Contre-Amiral A. SCHMIDT,
Marine Royale Danoise

Causerie préparée pour
la 8e Conférence Hydrographique Internationale, mai 1962

En 1947, j'ai publié dans le volume XXIV de la Revue Hydrographique Internationale, un article intitulé : *Les aides radioélectriques et la géodésie*. Les lecteurs sont priés de s'y reporter, car l'objet du présent article est un développement plus détaillé des idées qui y sont exprimées. J'y avance la théorie qu'une représentation graphique de l'anomalie de la pesanteur donne en fait la figure du géoïde rapportée au sphéroïde international de référence; en d'autres termes, que les deux globes se coupent suivant la ligne où l'anomalie de la pesanteur est nulle et que la déviation absolue de la verticale est nulle aux points où l'anomalie de la pesanteur est maximum ou minimum. Toutes les autres courbes isanomales représentent des courbes de niveau du géoïde rapporté au sphéroïde international de référence, de sorte que la déviation absolue de la verticale est toujours orthogonale aux courbes isanomales et est maximum aux endroits où les courbes isanomales sont le plus serrées. Ainsi, il est possible de trouver la déviation absolue de la verticale en un point par les observations gravimétriques effectuées sur une petite surface autour de ce point. La théorie et les idées émises sont basées sur les faits suivants :

1°) La théorie s'accorde bien avec les rares composantes NS des déviations relatives de la verticale observées jusqu'ici au Danemark (voir Geodaetisk Instituts Meddelelse Nr. 12 : « *Einige Schwereverhältnisse in Dänemark* » par G. NÖRGAARD, 1939).

2°) Au cours de mon passage au Service Hydrographique danois, j'ai eu l'occasion de connaître certains écarts assez grands, de quelques centaines de mètres, existant entre les coordonnées géographiques du Danemark, de la Suède et de l'Allemagne. Par la suite, j'ai appris qu'ils pouvaient être encore plus grands pour d'autres pays. Tout cela indiquait la présence d'erreurs systématiques dans la détermination des coordonnées absolues (géographiques).

3°) Ce que je savais de la théorie de la déviation des compas magnétiques m'a suggéré que la déviation absolue de la verticale pouvait être une sorte de variation et pouvait être observée de la même façon que la variation du compas. Le magnétisme et l'attraction universelle ont de très nombreux points communs (lignes de force, potentiel, variation-déviation de la verticale, la force d'attraction étant inversement proportionnelle au carré de la distance, etc.).

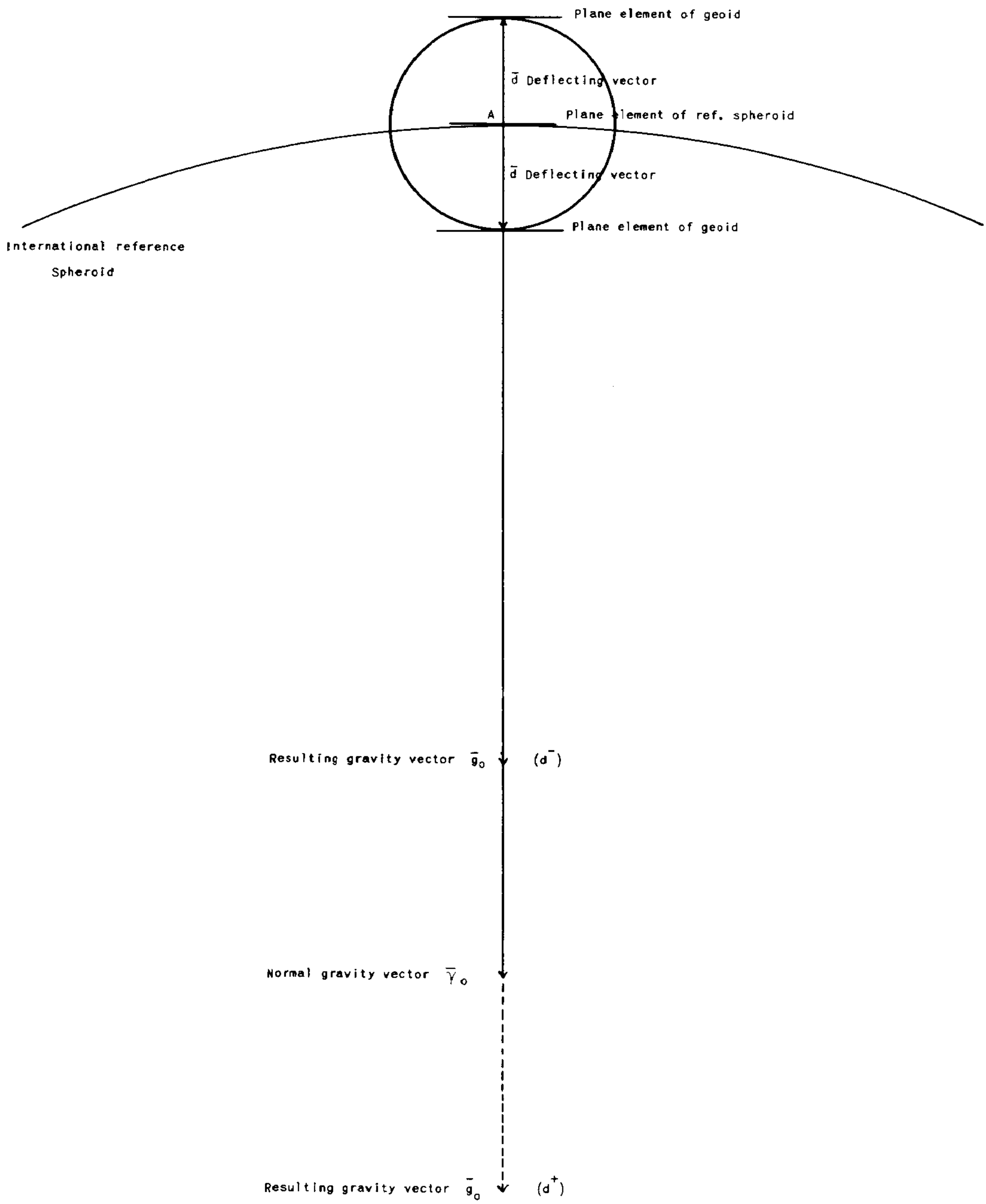

FIG. 1

Autant que je sache, il n'y a pas eu de réponse ou de controverse à mon article. Aucun pays, ni aucune institution de géodésie n'a mis ma théorie à l'essai ou n'a tenté de trouver la déviation absolue de la verticale au moyen d'observations gravimétriques. Comme les fonctions que j'occupais ne m'ont pas permis de me tenir au courant des ouvrages les plus récents parus sur la géologie, je peux me tromper et j'apprécierais très certainement toute critique.

Depuis lors, le Réseau Géodésique Européen est entré en vigueur de sorte que tous les pays d'Europe ont un réseau géographique commun. C'est une œuvre considérable qui n'a été possible que grâce à l'aide des Etats-Unis et l'utilisation des calculateurs électroniques.

Mais à mon avis, cela ne résoud pas la question d'une plus grande précision absolue pour nos cartes. Ce système *suppose* que le fil à plomb est vertical à l'origine du réseau européen (déviation de la verticale = 0), et il n'est pas possible d'étendre ce système aux îles lointaines. Ces îles ne peuvent être rattachées trigonométriquement au réseau et par conséquent chacune d'elles doit avoir sa propre origine géodésique, ce qui rend le système à peu près sans valeur pour les institutions hydrographiques qui sont responsables de la cartographie des mers.

Ce scepticisme sur la théorie et le peu d'empressement à la mettre à l'essai sont compréhensibles, car dans mon article ne figure aucune preuve mathématique ou physique de cette théorie. Depuis lors, j'ai essayé de présenter cette preuve.

Dans la fig. 1, A est un point choisi au hasard sur le sphéroïde international de référence. La pesanteur normale en A est le vecteur $\overline{\gamma_0}$ dont la valeur absolue $|\gamma_0|$ est donnée par la formule internationale de la gravité :

$$|\gamma_0| = 978{,}049 \cdot (1 + 0{,}0052884 \cdot \sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \cdot \sin^2 2\varphi) \text{ gal.}$$

(dans laquelle φ représente la latitude)

sa valeur est d'environ 980 000 mgal.

Le géoïde est très voisin du sphéroïde de référence de sorte que chaque point du géoïde correspond à un point et un seul du sphéroïde de référence. Au point correspondant du géoïde se trouvent en outre de nombreuses forces de déviation provenant des montagnes, des vallées et de la répartition hétérogène invisible des masses de la croûte terrestre.

Toutes ces forces de déviation peuvent être combinées en un seul vecteur $\overline{d}$ au point A. La valeur absolue $|d|$ de ce vecteur est de l'ordre d'environ 0 à 100 mgal, et est représentée par le rayon du cercle tracé autour du point A (dans les figures la dimension de $|d|$ est naturellement très exagérée par rapport à celle de $|\gamma_0|$).

Le vecteur de déviation $\overline{d}$ peut avoir une direction quelconque, mais nous supposerons qu'il se trouve dans le plan de la figure; s'il n'en est pas ainsi, nous prendrons comme plan de figure la section normale contenant le vecteur.

Nous pouvons considérer les exemples suivants :

A. — 1°) Si le vecteur $\overline{d}$ a le même sens que le vecteur $\overline{\gamma_0}$ leur résultante $\overline{g_0}$ aura la même direction que $\overline{\gamma_0}$ et sa valeur absolue $|g_0|$ sera $|\gamma_0| + |d|$; elle aura pour effet d'abaisser la surface du géoïde par rapport au sphéroïde de référence.

Au point A un petit élément plan du sphéroïde de référence ou son

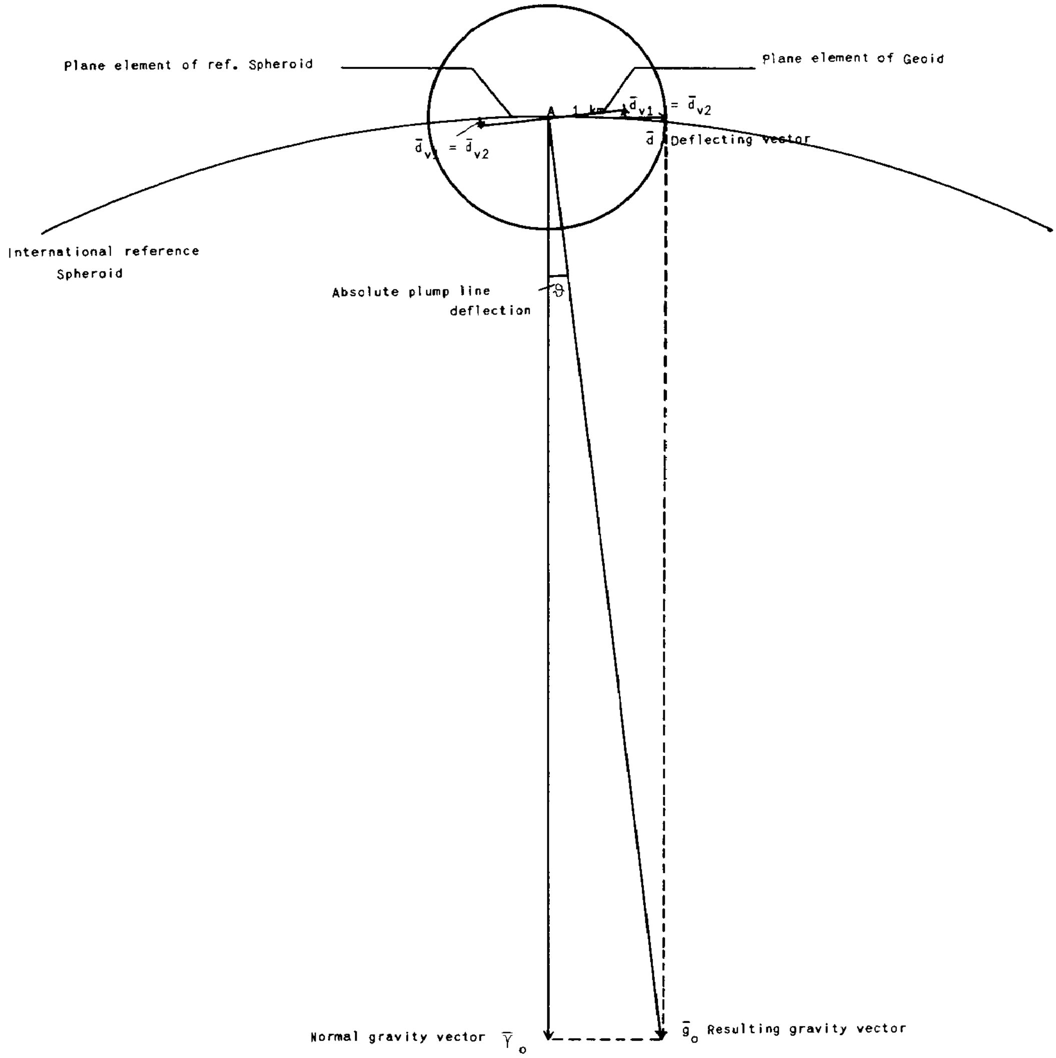

FIG. 2

plan tangent est perpendiculaire à la direction de $\overline{\gamma_0}$. Au bas du cercle se trouve un petit élément plan du géoïde ou son plan tangent perpendiculaire à la même direction. Les deux petits éléments sont parallèles et l'anomalie de pesanteur sera maximum.

2°) Si le vecteur $\overline{d}$ agit en sens inverse du vecteur $\overline{\gamma_0}$, leur résultante $\overline{g_0}$ aura la même direction que $\overline{\gamma_0}$ et sa valeur absolue $|g_0|$ sera $|\gamma_0| - |d_0|$; elle aura pour effet d'élever la surface du géoïde par rapport au sphéroïde de référence.

Au point A un petit élément plan du sphéroïde de référence ou son plan tangent est perpendiculaire à la direction de $\overline{\gamma_0}$. Au sommet du cercle se trouve un petit élément plan du géoïde ou son plan tangent perpendiculaire à la même direction. Les deux petits éléments plans sont parallèles et l'anomalie de la pesanteur sera minimum.

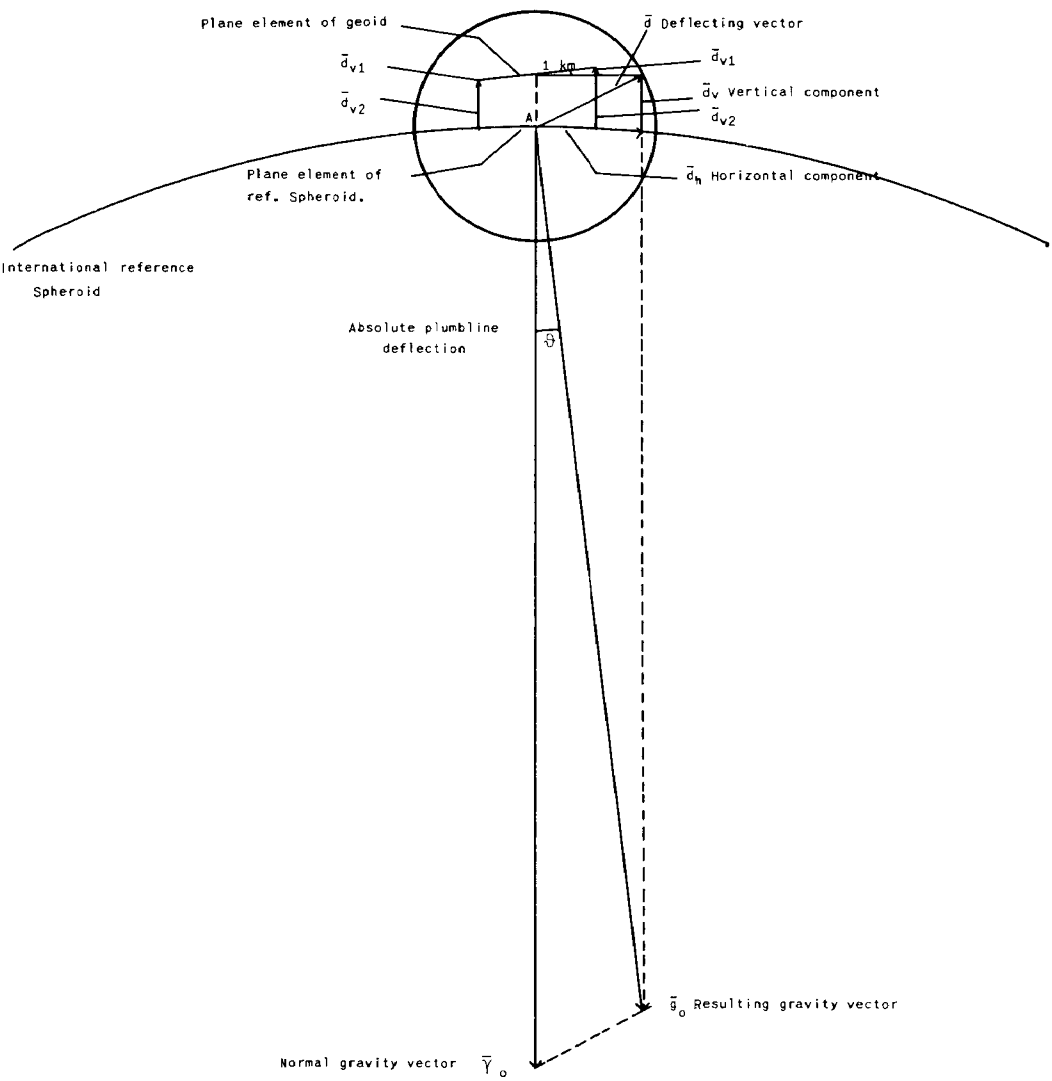

FIG. 3

3°) Si le vecteur $\overline{d}$ diminue jusqu'à zéro, les vecteurs $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{g_0}$ coïncident, et il en est de même des deux petits éléments plans du géoïde et du sphéroïde de référence, c'est-à-dire que l'anomalie de la pesanteur sera zéro et soit maximum, soit minimum.

B. — 1°) Si le vecteur de déviation $\overline{d}$ agit dans une direction perpendiculaire au vecteur normal de la pesanteur $\overline{\gamma_0}$, la résultante $\overline{g_0}$ est telle que le montre la fig. 2. Le petit angle θ entre $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{g_0}$ est la déviation absolue de la verticale. Comme $\overline{d}$ est très petit par rapport à γ_0, la déviation absolue de la verticale mesurée en secondes d'arc sera :

$$\theta = \frac{|d| \text{ mgal} \cdot \omega'' \sin 1''}{|\gamma_0| \text{ mgal}}$$

Au point A un petit élément plan du sphéroïde de référence ou son plan tangent est perpendiculaire à la direction de $\overline{\gamma_0}$ et un autre petit élément plan du géoïde ou son plan tangent est perpendiculaire à la direction de $\overline{g_0}$. L'angle compris entre les deux petits éléments plans est égal à la déviation de la verticale θ entre $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{g_0}$.

La valeur absolue du vecteur de pesanteur $|g_0|$ est égale à la valeur absolue du vecteur normal de la pesanteur $\overline{\gamma_0}$ donnée par la formule internationale de la pesanteur.

Comme la valeur absolue de la pesanteur (pour $|\gamma_0|$ et $|g_0|$) est la somme de la force d'attraction de la terre (inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de gravité de la terre) et de la force centrifuge créée par la rotation de la terre (proportionnelle à la distance à l'axe de la terre), il s'ensuit que les deux petits éléments plans sont à la même distance du centre de gravité et de l'axe de la terre. Cela signifie que les deux globes différents orientés d'une façon absolue (avec le même centre de gravité et le même axe de rotation) se couperont aux endroits où l'anomalie de pesanteur est nulle.

2°) Si le vecteur $\overline{d}$ diminue jusqu'à zéro, la déviation de la verticale diminue aussi jusqu'à zéro, et nous avons l'exemple A 3°) où les vecteurs $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{g_0}$ coïncident; dans ce cas, l'anomalie de la pesanteur sera nulle et sera soit maximum, soit minimum.

C. — 1°) Si le vecteur $\overline{d}$ agit dans une direction quelconque, la force résultante $\overline{g_0}$, la déviation de la verticale θ et les deux petits éléments plans du géoïde et du sphéroïde de référence ou leurs plans tangents se trouvent situés comme l'indique la fig. 3.

Nous ne pouvons pas déterminer la valeur absolue ni la direction du vecteur de déviation $\overline{d}$. Etant donné que le gravimètre, comme tous les autres instruments géodésiques, est orienté au moyen d'un niveau à bulle, nous ne pouvons déterminer que la composante verticale du vecteur de déviation $\overline{d}$, c'est-à-dire l'anomalie de la pesanteur d_v. Comme on le voit sur la figure d_v ou l'anomalie de la gravité ($g_0''—\gamma_0$) représente la distance verticale (mesurée en milligals) entre le géoïde et le sphéroïde de référence.

La composante horizontale d_h du vecteur de déviation $\overline{d}$ représente, comme on le voit d'après la figure, la distance de la direction du vecteur $\overline{\gamma_0}$ à l'extrémité inférieure du vecteur $\overline{g_0}$ (centre de courbure du géoïde). La composante horizontale d_h du vecteur d ne peut être déterminée; nous pouvons déterminer seulement les points où elle est nulle, c'est-à-dire où l'anomalie de la gravité est maximum ou minimum et où les vecteurs $\overline{\gamma_0}$ et $\overline{g_0}$ ont la même direction.

Avec le gravimètre ordinaire, nous ne mesurons pas la pesanteur, mais seulement des *différences* de gravité. Comme les différences sont très petites par rapport à la gravité, on peut les mesurer avec une précision beaucoup plus grande. Avec un gravimètre moderne, l'erreur moyenne d'une seule observation est de 0,1 - 0,2 mgal, tandis que les observations absolues de gravité ont une erreur moyenne intrinsèque de 1 à 3 mgal et une erreur moyenne portant sur trois observations différentes de gravité de 10 à 20 mgal.

Je pense qu'il doit être possible, étant donné la sensibilité élevée des gravimètres modernes, de déterminer la déviation absolue de la verticale avec la même précision que la latitude et la longitude qui ne peuvent être déterminées qu'avec une incertitude sur la deuxième décimale des secondes d'arc par suite de la limite de fonctionnement des niveaux à bulle.

Si nous voulons déterminer la déviation de la verticale au point A, nous pourrions établir 8 stations gravimétriques au même niveau à une distance d'environ 1 km (avec une précision du centimètre) de A dans les directions N, NE, E, SE, S, SW, W et NW et y mesurer les différences de gravité avec le point A (de préférence d'une façon simultanée en faisant des observations astronomiques au point A).

Si le vecteur de déviation $\overline{d}$ ou d_h agit dans la direction du Nord, nous aurions une courbe comme celle qui est indiquée dans la fig. 4 avec l'équation $d_{v_1} = -B \cos \varepsilon$.

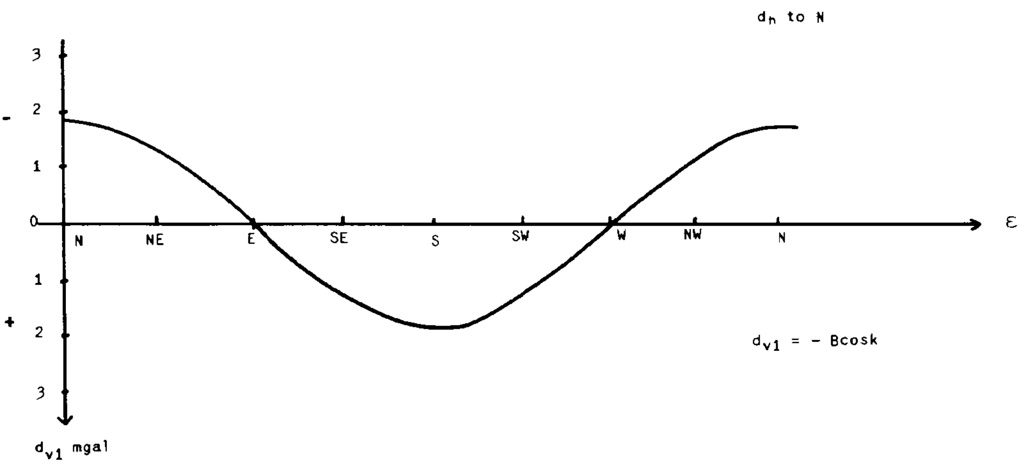

Fig. 4

Si d_h ou la déviation de la verticale θ diminue, la courbe s'aplatira (la constante $|B|$ sera plus petite) jusqu'à ce qu'enfin, lorque d_h ou θ sont nuls (exemple A1, 2, 3) la constante B soit nulle et la courbe soit une ligne droite.

Si le vecteur de déviation $\overline{d}$ ou d_h agit dans la direction de l'est, nous aurons une courbe comme celle indiquée dans la fig. 5 avec l'équation $d_{v_1} = -C \sin \varepsilon$.

Si le vecteur de déviation $\overline{d}$ ou d_h agit dans une direction quelconque, nous aurons une courbe comme celle indiquée dans la fig. 6 avec l'équation $d_{v_1} = -B \cos \varepsilon - C \sin \varepsilon$.

D'après les figures, on voit que la déviation de la verticale est :

$$\theta = \frac{d_{v_1} \text{ mgal} \cdot \omega'' \sin 1''}{1 \text{ km}}$$

et le problème est maintenant d'obtenir que d_{v_1} en milligals soit comparable avec la distance en kilomètres.

Quand le géoïde s'élève au-dessus du sphéroïde de référence il doit avoir une courbure plus grande et par conséquent un plus petit rayon de

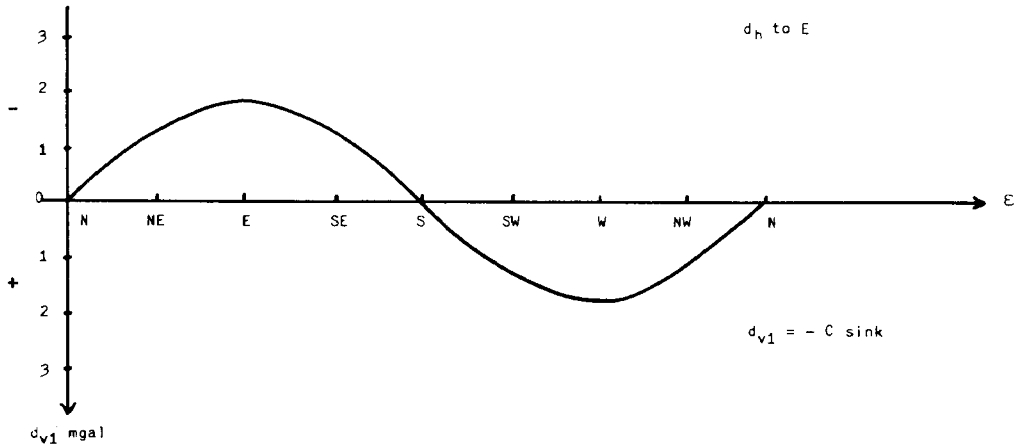

FIG. 5

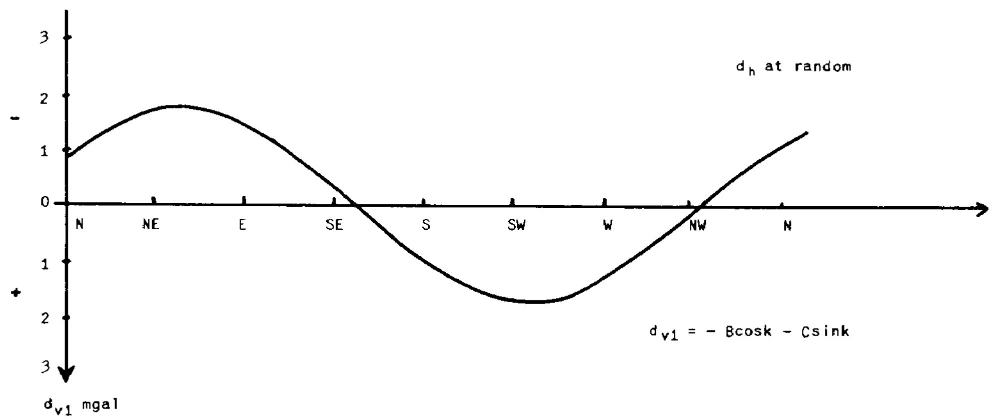

FIG. 6

courbure que le sphéroïde pour aller rejoindre le sphéroïde de référence, et inversement lorsque le géoïde est au-dessous du sphéroïde de référence, il doit avoir une courbure plus petite et par conséquent un rayon de courbure plus grand que le sphéroïde pour aller rejoindre le sphéroïde de référence, exactement comme $|g_0|$ par rapport à $|\gamma_0|$. Par conséquent nous choisissons notre échelle des forces de façon que $|\gamma_0|$ mgal soit voisin du rayon de courbure K du sphéroïde de référence exprimé en centimètres au point A et nous pouvons trouver la longueur de 1 mgal en centimètres; nous obtenons ainsi la déviation de la verticale :

$$\theta = \frac{d_{v_1}\,\text{cm} \cdot \omega'' \sin 1''}{100\ 000\ \text{cm}}$$

Nous voyons d'après la fig. 4 qu'un vecteur de déviation $\overline{d}$ ou d_h dirigé vers le nord donne une déviation de la verticale vers le sud. Si au lieu des deux constantes —B et —C nous introduisons les composantes de la déviation de la verticale : ξ (dans la direction nord-sud) et η (dans la direction est-ouest), nous avons : $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $\xi = \theta \cdot \cos \varepsilon$ et $\eta = \theta \cdot \sin \varepsilon$, θ étant la déviation totale de la verticale et ε son azimut. Nous avons alors l'équation suivante :

$$d_{v_1} = \xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon$$

Si nous voulons représenter l'intersection du cylindre de rayon 1 km avec les deux petits éléments du sphéroïde et du géoïde de référence, nous avons l'équation suivante :

$$d_{v_2} = A + \xi \cos \varepsilon + \eta \sin \varepsilon$$

qui représente une constante et une déviation semi-circulaire. A est une constante représentant l'anomalie de gravité au point A, c'est-à-dire une constante d'orientation dépendant de la station de référence ou de la valeur absolue de la gravité utilisée.

Les valeurs observées des différences de gravité aux huit stations gravimétriques suggérées ne peuvent pas tomber exactement sur la courbe à cause des erreurs d'observation; mais, comme pour la variation des compas, nous pouvons calculer les constantes d'une courbe théorique qui est le plus conforme à toutes les observations. Nous pouvons calculer les composantes ξ et η de la déviation de la verticale, ou calculer θ et son azimut ε. Seules des expériences pratiques peuvent montrer si la distance proposée de 1 km est la meilleure ou s'il vaudrait mieux choisir trois distances, par exemple : 500 m, 1 000 m et 1 500 m, et s'il serait nécessaire de prendre en considération la petite variation de $|\gamma_0|$ avec la latitude (environ 1 mgal par minute d'arc).

Je viens d'essayer de montrer la validité de la théorie ci-dessus sur le sphéroïde de référence et le géoïde.

Il est très rare que nous puissions faire nos observations sur le géoïde (niveau moyen de la mer); nous devons les faire à la surface physique de la terre.

Mais les considérations que nous venons d'avancer s'appliquent aussi bien à d'autres surfaces équi-potentielles; la constante A (anomalie de pesanteur au point A) aura seulement une valeur différente. Mais ce n'est pas tant la position du géoïde qui a un intérêt pratique, mais plutôt son *inclinaison* ou la déviation des instruments placés sur la surface de la terre. Comme les points d'observation (points d'ordre 0) appartiennent généralement à un réseau de triangulation du premier ordre, ils sont à un niveau élevé, et il n'est pas possible de faire des observations de gravité autour d'un point d'ordre 0 au même niveau que ce dernier. On doit donc les réduire (à l'aide de la correction à l'air libre) au niveau du point d'ordre 0. Nous pouvons alors corriger toutes les observations de la déviation de la verticale (inclinaison des instruments) et appliquer la petite correction pour la courbure de la ligne de gravité idéale (environ 0″,016 pour 100 mètres dans le plan méridien) de façon à réduire la latitude au sphéroïde de référence.

Pour les savants, les navigateurs et les hydrographes, il est très important que les coordonnées géographiques soient réellement universelles (absolues), c'est-à-dire que les réseaux géographiques de pays différents soient en conformité. Il me semble évident qu'une carte marine ne peut pas être plus précise que la détermination de la latitude, de la longitude et de la direction du carroyage géographique en un point du sphéroïde de référence, ce qui correspond à une précision de la première ou de la deuxième décimale de seconde d'arc, ce qui est suffisant et ne peut être vérifié même sur les cartes à grande échelle. Nous choisissons nous-même la précision relative (le cm ou le mm, c'est-à-dire à peu près la 4e ou la 5e décimale de seconde d'arc). Il suffit alors d'employer des tables trigonométriques ou logarithmiques à 7 ou 8 décimales.

Si nous *supposons* que la déviation de la verticale est nulle à une origine géodésique, nous introduisons au départ une erreur systématique du même ordre de grandeur que la déviation absolue de la verticale (peut-être quelques secondes d'arc) de la même façon que le navigateur qui suppose que la variation de son compas magnétique est nulle, a une erreur systématique du même ordre de grandeur que la variation (plusieurs degrés) sur son cap, même s'il peut lire le compas et tenir sa route à un demi-degré près.

Il est par conséquent très important de pouvoir déterminer la déviation absolue de la verticale; c'est en fait d'une telle importance que je pense que le Bureau Hydrographique International devrait contacter l'Union Internationale de Géodésie et de Géophysique, et lui demander de revoir cette théorie et de la mettre à l'essai.